

Unification des méthodes discrètes de segmentation

Hugues Talbot

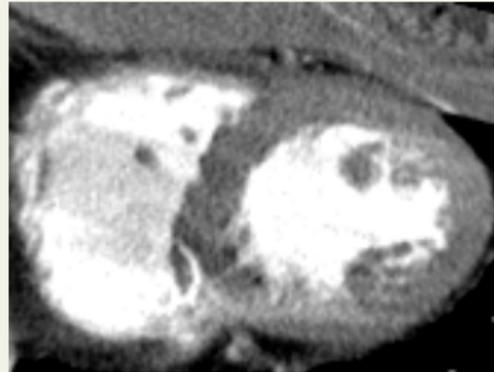
Travail de thèse de C. Couprie, avec L. Grady et L. Najman

A3SI – LIGM

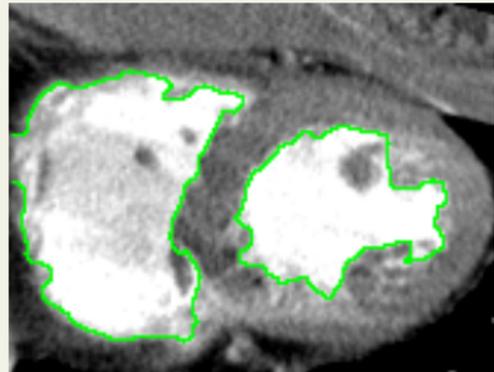
11 décembre 2013

- 1 Introduction
- 2 Quelques méthodes de segmentation sur graphes
- 3 Unification des formulations discrètes
- 4 Conclusion

La segmentation



La segmentation



Un des objectifs du thème : la segmentation d'images

Cadre

- Fait partie des problèmes inverses en imagerie :
 - Segmentation,
 - Déconvolution
 - Débruitage
- Les outils couvrent un large spectre :
 - Discret, continu
 - Convexe ou non
 - Hiérarchiques, multi-échelles
 - Stochastique ou déterministe

Un thème commun

Optimisation

- « Tout est un problème d'optimisation » (Boyd 2004, bien d'autres avant)
- Exemples : débruitage, restauration, reconstruction tomographique, segmentation, etc.
- Cet état d'esprit n'est pas toujours productif :
 - La formulation n'est pas souvent triviale ;
 - On ne sait résoudre efficacement que certains problèmes ;
 - Même ceux qu'on sait résoudre relativement efficacement réclament souvent des ressources considérables.
 - Comme dans tout domaine académique il y a aussi des querelles de chapelle.
- Néanmoins, de nombreux progrès sont réalisés, nous allons en présenter quelques uns.

Maximum de vraisemblance

- Problème : estimer un paramètre vectoriel θ d'un modèle statistique en partant des observations x .
- Soit f la distribution de l'échantillonnage, $f(x|\theta)$ la probabilité de x , et θ les paramètres du modèle. La fonction

$$\theta \mapsto f(x|\theta)$$

est appelée la *vraisemblance* (likelihood). L'estimateur ML est

$$\hat{\theta}_{ML}(x) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} f(x|\theta)$$

- Utilisée en régression, p.ex modèles linéaires généralisés.
- Nécessite : modèle descriptif avec suffisamment peu de degrés de libertés, beaucoup de données, un bruit régulier, etc.
- Une approche régularisée est préférable.

Maximum a Posteriori

- Si on suppose qu'il existe une distribution *a priori* pour g sur les θ , alors en suivant la méthodologie bayésienne, on peut traiter θ en tant que variable aléatoire et calculer une distribution *a posteriori* pour les θ :

$$\theta \mapsto f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)g(\theta)}{\int_{\vartheta \in \Theta} f(x|\vartheta)g(\vartheta)d\vartheta}$$

(c-à-d exactement le théorème de Bayes).

- L'estimateur a posteriori (MAP) est

$$\hat{\theta}_{MAP}(x) = \operatorname{argmax}_{\theta} f(\theta|x) = \operatorname{argmax}_{\theta} f(x|\theta)g(\theta)$$

- On voit que l'estimateur MAP est une *régularisation* de l'estimateur ML. En particulier si g est uniforme sur θ alors MAP se réduit à ML.

Résoudre les formulations MAP

- [Geman and Geman, 1984] ont proposé une méthode de résolution sous forme de champs de Markov, avec un échantillonneur aléatoire (de Gibbs).
- En 1992, Rudin, Osher and Fatemi [Rudin et al., 1992] ont proposé un modèle de régularisation basé sur la variation totale (TV) et un solveur sur les ensembles de niveaux (level-sets) pour les problèmes de débruitage.
- En 1998, Boykov, Veksler and Zabih [Boykov et al., 1998] ont proposé une méthode basée sur les flots maximaux/coupure minimale (graph cuts) pour trouver efficacement une solution exacte dans certains cas.

Traduction dans le cas des graphes

Champs de Markov

- Un champs de Markov est un modèle formé d'un ensemble de « sites » (pixels) $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, d'un ensemble de variables aléatoires $y = \{y_1, \dots, y_n\}$ associées à chaque site, et d'un ensemble de voisins $\mathcal{N}_{1, \dots, n}$ en chaque site.
- \mathcal{N}_p décrit le voisinage de chaque site p .
- On définit la *condition de Markov*

$$\Pr(y_p | y_{S \setminus p}) = \Pr(y_p | \mathcal{N}_p),$$

qui traduit le fait que la probabilité d'un site p ne dépend que de ses voisins immédiats.

Traduction dans le cas des graphes

Formulation MAP d'un champ de Markov

- Soit un ensemble d'observables $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$,
- La formulation MAP s'écrit :

$$\hat{y} = \operatorname{argmax}_{y_{1\dots n}} \Pr(y_{1\dots n} | \mathbf{x}) \quad (1)$$

$$= \operatorname{argmax}_{y_{1\dots n}} \prod_{n=1}^n \Pr(x_n | y_n) \Pr(y_{1\dots n}) \quad (2)$$

$$= \operatorname{argmax}_{y_{1\dots n}} \sum_{n=1}^n \log[\Pr(x_n | y_n)] + \log[\Pr(y_{1\dots n})] \quad (3)$$

$$= \operatorname{argmin}_{y_{1\dots n}} \sum_{p=1}^n U_p(y_p) + \sum_{u \in \mathcal{N}_p} P_{u,p}(y_u, y_p) \quad (4)$$

Traduction dans le cas des graphes

Interprétation sur des graphes

$$\hat{y} = \operatorname{argmin}_{y_{1\dots n}} \sum_{p=1}^n U_p(y_p) + \sum_{u \in \mathcal{N}_p} P_{u,p}(y_u, y_p) \quad (1)$$

- Cette somme contient des termes *unitaires* $U_p(y_p)$ et des *paires* $P_{u,p}(y_u, y_p)$.
- C'est un problème d'optimisation, suivant l'expression des fonctions de probabilités, on peut le résoudre par des moyens statistiques (EM), des analogies physiques (recuit simulé) ou encore par des techniques d'optimisation linéaires ou convexes.
- Dans certains cas, les coupures de graphes sont bien adaptées.

Traduction dans le cas des graphes

Cas des coupures de graphes

Par exemple, si on considère le cas de la *segmentation* binaire. Avec des poids binaire et unitaires, on peut écrire :

$$\operatorname{argmin} \hat{E}(G) = \sum_{v_i \in V} w_i(V_i) + \lambda \sum_{e_{ij} \in \vec{E}} w_{ij} \delta_{V_i \neq V_j} \quad (1)$$

- V_i vaut 1 if $v_i \in V_s$ et 0 if $v_i \in V_t$, c-à-d 1 si le pixel i appartient à la partition contenant s et 0 sinon.
- $\delta_{V_i \neq V_j}$ vaut 1 si l'arête e_{ij} appartient à la coupure, et 0 sinon (modèle de Potts).

Traduction dans le cas des graphes

Illustration

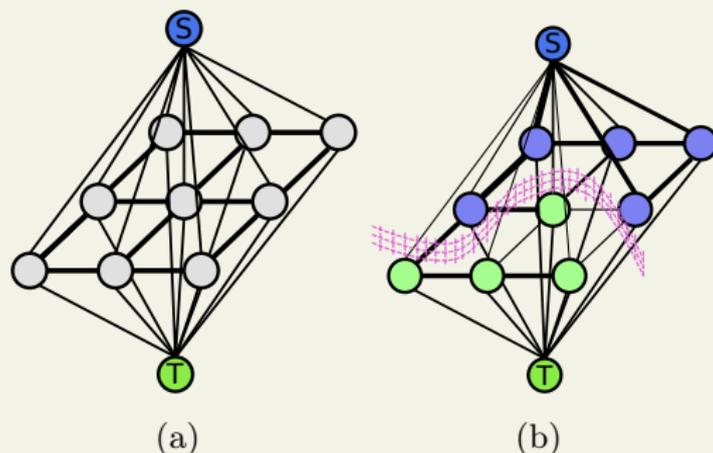


FIGURE 1 : Segmentation avec poids unitaires. (a). La coupe minimale est une surface qui sépare s de t . (b) un choix approprié des poids binaires ou unitaire peut correspondre à des contraintes de topologie.

Traduction dans le cas des graphes

Exemple

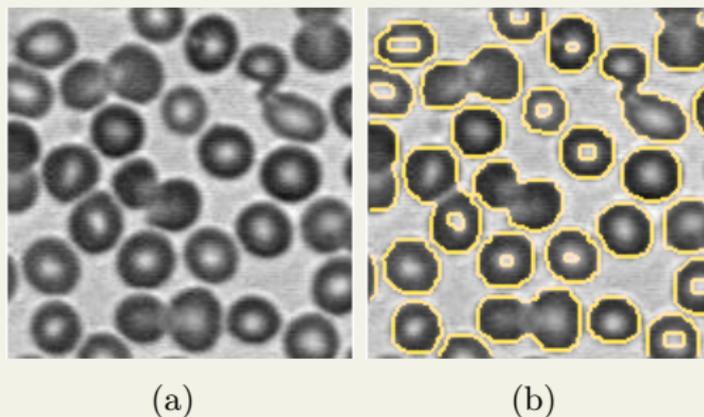


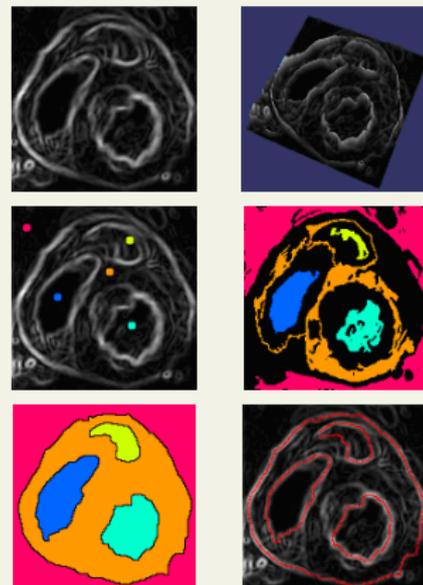
FIGURE 1 : Segmentation unitaire sans marqueurs.

Modèle de [Boykov and Jolly, 2002] (ICCV 2001).

La ligne de partage des eaux [Beucher and Lantuéjoul, 1979]

Avantages

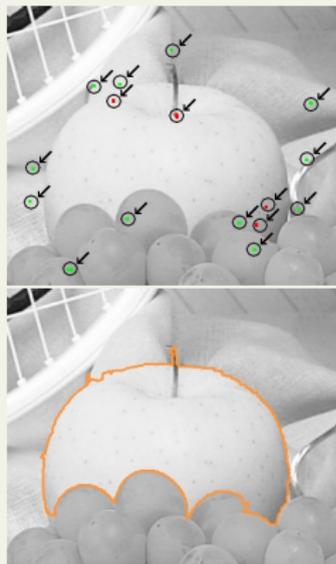
- Rapide
- Multi-label
- Robuste
- Très étudiée, en particulier dans le labo [Cousty et al., 2008, Cousty et al., 2010]



La ligne de partage des eaux [Beucher and Lantuéjoul, 1979]

Avantages

- Rapide
- Multi-label
- Robuste
- Très étudiée, en particulier dans le labo [Cousty et al., 2008, Cousty et al., 2010]



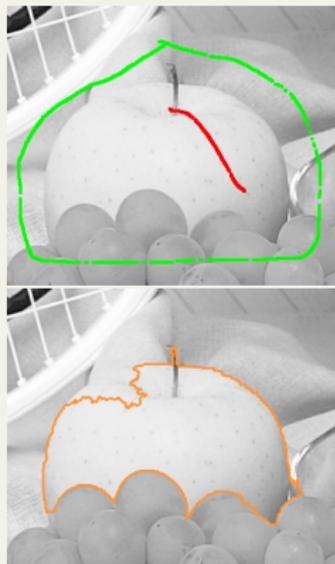
La ligne de partage des eaux [Beucher and Lantuéjoul, 1979]

Avantages

- Rapide
- Multi-label
- Robuste
- Très étudiée, en particulier dans le labo [Cousty et al., 2008, Cousty et al., 2010]

Inconvénients

- Effet de « fuite »
- Pas d'interprétation MAP
- Résultat non unique (dépendant de l'algorithme)

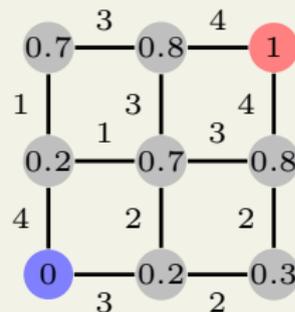


Le marcheur aléatoire [Grady, 2006]

- Solution du problème de Dirichlet discret

Avantages

- Solution flexible d'un système quadratique
- Multi-label
- Sans artefact de grille

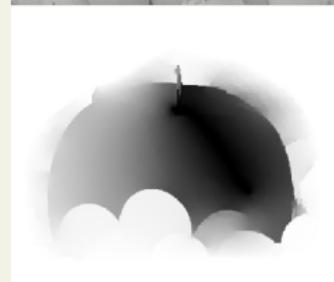
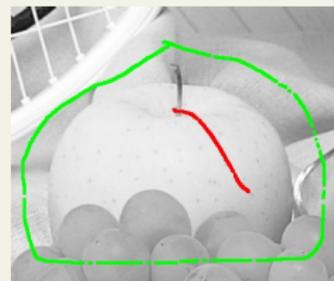


Le marcheur aléatoire [Grady, 2006]

- Solution du problème de Dirichlet discret

Avantages

- Solution flexible d'un système quadratique
- Multi-label
- Sans artefact de grille



Le marcheur aléatoire [Grady, 2006]

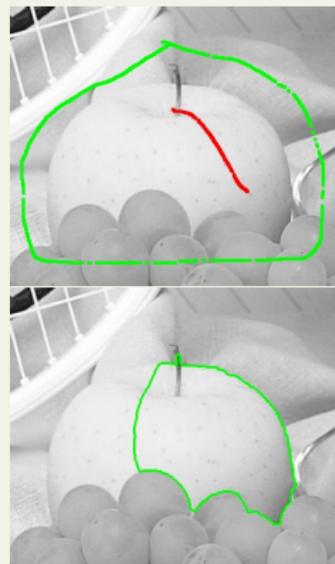
- Solution du problème de Dirichlet discret

Avantages

- Solution flexible d'un système quadratique
- Multi-label
- Sans artefact de grille

Inconvénients

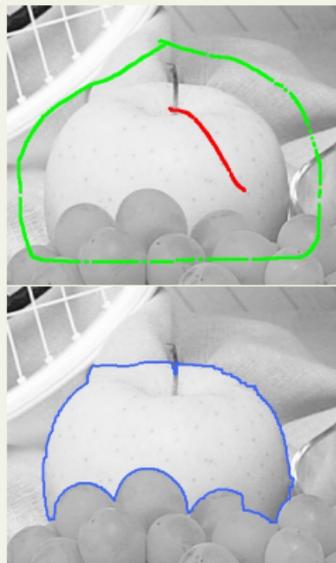
- Nécessite un bon placement des marqueurs
- Complexité super-linéaire



Les coupures de graphe [Boykov et al., 1998]

Avantages

- Peut résoudre une large classe de problèmes
- Robuste au placement des marqueurs



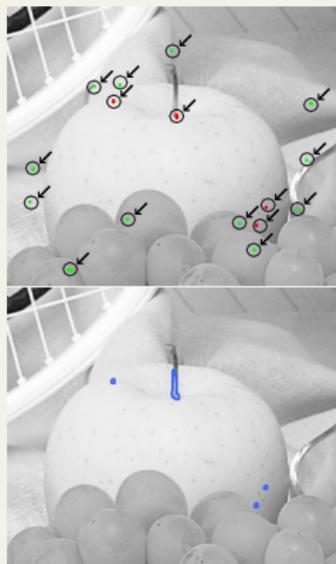
Les coupures de graphe [Boykov et al., 1998]

Avantages

- Peut résoudre une large classe de problèmes
- Robuste au placement des marqueurs

Inconvénients

- Biaisé vers les petits contours
- Artefacts de grille
- Complexité super-linéaire
- Mal adapté au multi-label



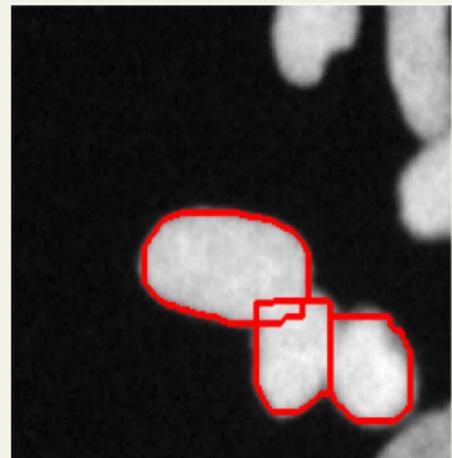
Les coupures de graphe [Boykov et al., 1998]

Avantages

- Peut résoudre une large classe de problèmes
- Robuste au placement des marqueurs

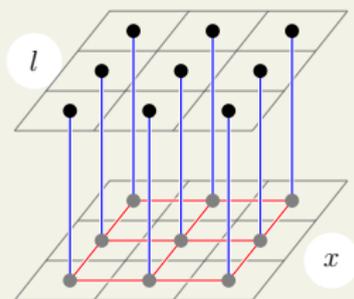
Inconvénients

- Biaisé vers les petits contours
- Artefacts de grille
- Complexité super-linéaire
- Mal adapté au multi-label



Unification des formulations discrètes

$$x_{p,q}^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^p |x_i - x_j|^q}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i \in V} w_i^p |x_i - l_i|^q}_{\text{Fidélité}}$$



Unification des formulations discrètes

$$x_{p,q}^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^p |x_i - x_j|^q}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i \in V} w_i^p |x_i - l_i|^q}_{\text{Fidélité}}$$

q \ p	0	finite	∞
1	Reduction to seeds	Graph cuts	Max Spanning Forest [Allène et al., 2007]
2	ℓ_2 -norm Voronoi	Random walker	
∞	ℓ_1 -norm Voronoi	ℓ_1 -norm Voronoi	Shortest Path [Sinop and Grady, 2007]

Unification des formulations discrètes

$$x_{p,q}^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^p |x_i - x_j|^q}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i \in V} w_i^p |x_i - l_i|^q}_{\text{Fidélité}}$$

q \ p	0	finite	∞
1	Reduction to seeds	Graph cuts	Max Spanning Forest [Allène et al., 2007]
2	ℓ_2 -norm Voronoi	Random walker	
∞	ℓ_1 -norm Voronoi	ℓ_1 -norm Voronoi	Shortest Path [Sinop and Grady, 2007]

Unification des formulations discrètes

$$x_{p,q}^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^p |x_i - x_j|^q}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i \in V} w_i^p |x_i - l_i|^q}_{\text{Fidélité}}$$

q \ p	0	finite	∞
1	Reduction to seeds	Graph cuts	Max Spanning Forest [Allène et al., 2007]
2	ℓ_2 -norm Voronoi	Random walker	
∞	ℓ_1 -norm Voronoi	ℓ_1 -norm Voronoi	Shortest Path [Sinop and Grady, 2007]

Unification des formulations discrètes

$$x_{p,q}^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^p |x_i - x_j|^q}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i \in V} w_i^p |x_i - l_i|^q}_{\text{Fidélité}}$$

q \ p	0	finite	∞
1	Reduction to seeds	Graph cuts	Max Spanning Forest [Allène et al., 2007]
2	ℓ_2 -norm Voronoi	Random walker	
∞	ℓ_1 -norm Voronoi	ℓ_1 -norm Voronoi	Shortest Path [Sinop and Grady, 2007]

Unification des formulations discrètes

$$x_{p,q}^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^p |x_i - x_j|^q}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i \in V} w_i^p |x_i - l_i|^q}_{\text{Fidélité}}$$

q \ p	0	finite	∞
1	Reduction to seeds	Graph cuts	Max Spanning Forest [Allène et al., 2007]
2	ℓ_2 -norm Voronoi	Random walker	
∞	ℓ_1 -norm Voronoi	ℓ_1 -norm Voronoi	Shortest Path [Sinop and Grady, 2007]

Unification des formulations discrètes

$$x_{p,q}^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^p |x_i - x_j|^q}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i \in V} w_i^p |x_i - l_i|^q}_{\text{Fidélité}}$$

q \ p	0	finite	∞
1	Reduction to seeds	Graph cuts	Max Spanning Forest [Allène et al., 2007]
2	ℓ_2 -norm Voronoi	Random walker	
∞	ℓ_1 -norm Voronoi	ℓ_1 -norm Voronoi	Shortest Path [Sinop and Grady, 2007]

[Couprie et al., 2009, Couprie et al., 2011]

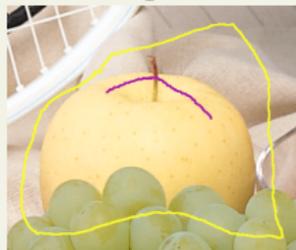
Unification des formulations discrètes

$$x_{p,q}^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^p |x_i - x_j|^q}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\sum_{v_i \in V} w_i^p |x_i - l_i|^q}_{\text{Fidélité}}$$

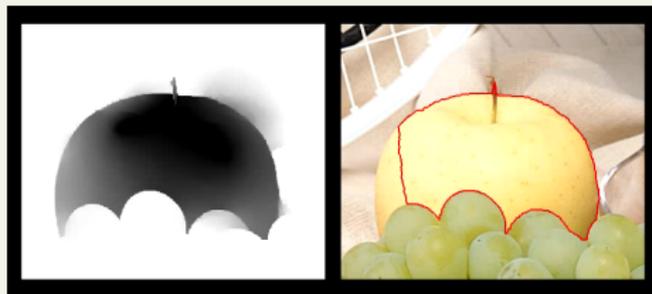
$$\bar{x} = \lim_{p \rightarrow \infty} x_{p,q}^*$$

Convergence du RW vers une LPE quand $p \rightarrow \infty$

Marqueurs



$$x^*_1 = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij} \mathbb{1}_{|x_i - x_j|^2}}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité}}$$

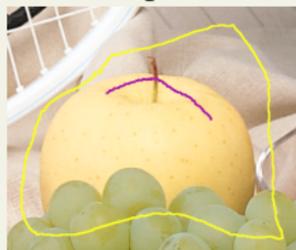


solution x^*_1

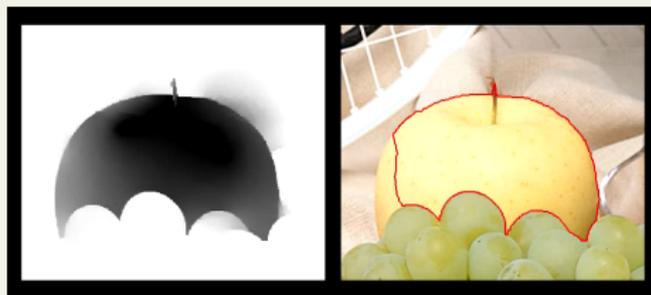
coupure : seuillage de x^*_1

Convergence du RW vers une LPE quand $p \rightarrow \infty$

Marqueurs



$$x^*_2 = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^2 |x_i - x_j|^2}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité}}$$

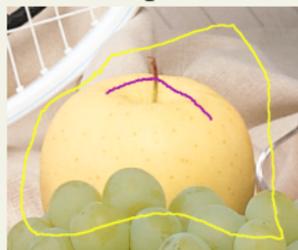


solution x^*_2

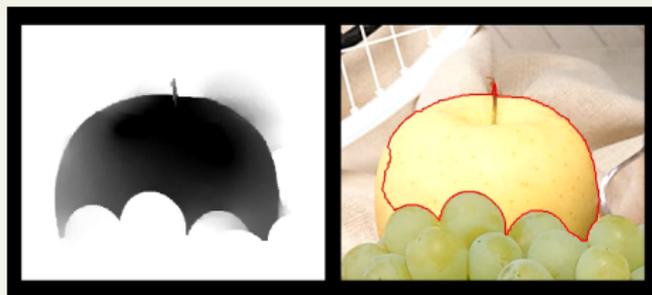
coupure : seuillage de x^*_2

Convergence du RW vers une LPE quand $p \rightarrow \infty$

Marqueurs



$$x^*_3 = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^3 |x_i - x_j|^2}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité}}$$

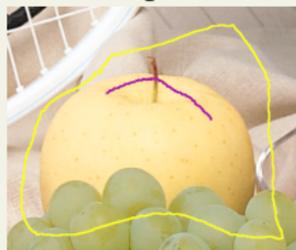


solution x^*_3

coupure : seuillage de x^*_3

Convergence du RW vers une LPE quand $p \rightarrow \infty$

Marqueurs



$$x^*_4 = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^4 |x_i - x_j|^2}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité}}$$

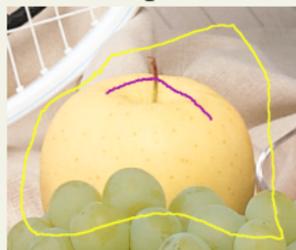


solution x^*_4

coupure : seuillage de x^*_4

Convergence du RW vers une LPE quand $p \rightarrow \infty$

Marqueurs



$$x_6^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^6 |x_i - x_j|^2}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité}}$$

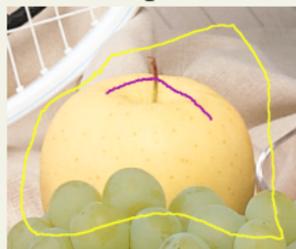


solution x_6^*

coupure : seuillage de x_6^*

Convergence du RW vers une LPE quand $\rho \rightarrow \infty$

Marqueurs



$$x^*_9 = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^9 |x_i - x_j|^2}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité}}$$

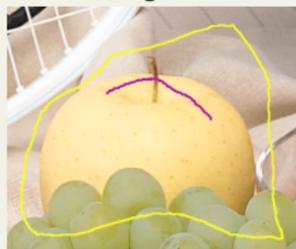


solution x^*_9

coupure : seuillage de x^*_9

Convergence du RW vers une LPE quand $\rho \rightarrow \infty$

Marqueurs



$$x_{13}^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^{13} |x_i - x_j|^2}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité}}$$

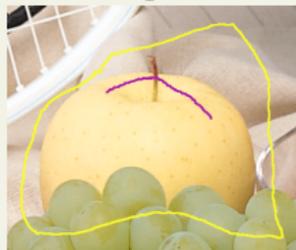


solution x_{13}^*

coupure : seuillage de x_{13}^*

Convergence du RW vers une LPE quand $\rho \rightarrow \infty$

Marqueurs



$$x_{18}^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^{18} |x_i - x_j|^2}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité}}$$

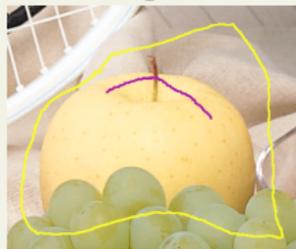


solution x_{18}^*

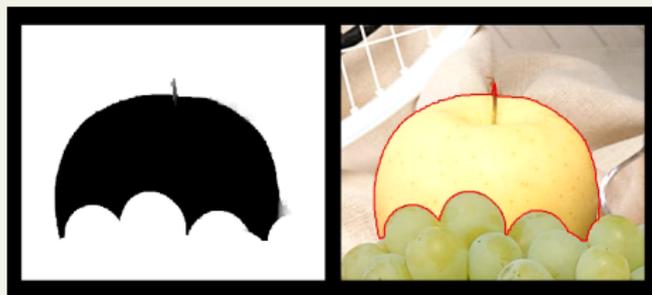
coupure : seuillage de x_{18}^*

Convergence du RW vers une LPE quand $\rho \rightarrow \infty$

Marqueurs



$$x_{24}^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^{24} |x_i - x_j|^2}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité}}$$

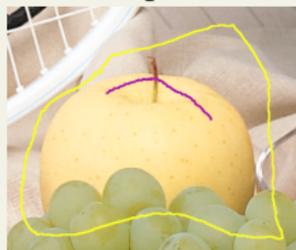


solution x_{24}^*

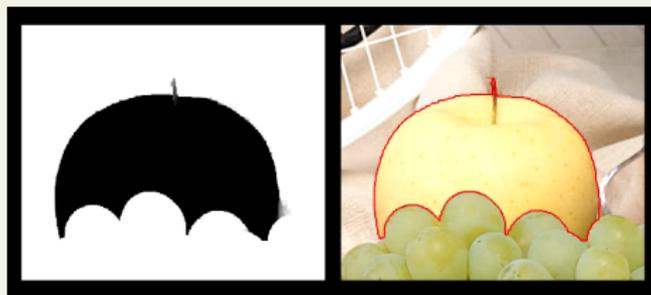
coupure : seuillage de x_{24}^*

Convergence du RW vers une LPE quand $p \rightarrow \infty$

Marqueurs



$$x_{30}^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^{30} |x_i - x_j|^2}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité}}$$



solution x_{30}^*

coupure : seuillage de x_{30}^*

Ligne de partage des eaux « puissance »

Input seeds



$$x_p^* = \operatorname{argmin}_x \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}^p |x_i - x_j|^q}_{\text{Régularisation}} + \underbrace{\mathcal{D}(x)}_{\text{Fidélité}}$$



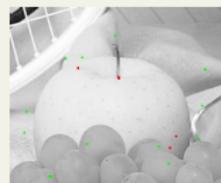
$\bar{x} = \lim_{p \rightarrow \infty} x_p^*$ coupure : seuillage
de \bar{x}

Theorèmes « Power Watershed »

Quand $p \rightarrow \infty$,

- La coupure est une coupure de forêt de poids minimum (une LPE).
- Quand $q > 1$, la solution \bar{x} est unique

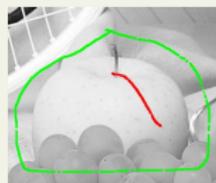
Comparaison des résultats



Input seeds



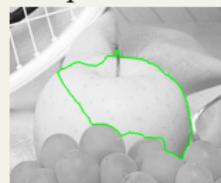
GraphCut



Input seeds



GraphCut



RandWalk



ShortestPath



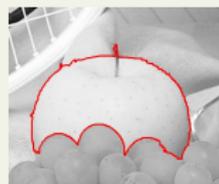
RandWalk



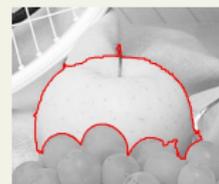
ShortestPath



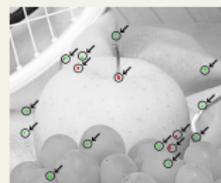
MaxSF

PW $q = 2$ 

MaxSF

PW $q = 2$

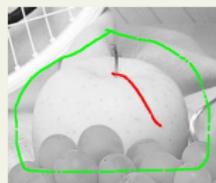
Comparaison des résultats



Input seeds



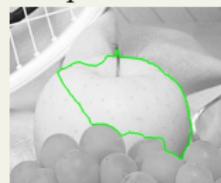
GraphCut



Input seeds



GraphCut



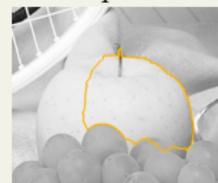
RandWalk



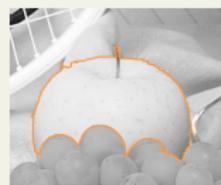
ShortestPath h



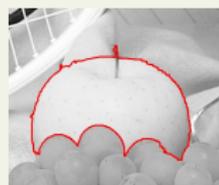
RandWalk



ShortestPath



MaxSF

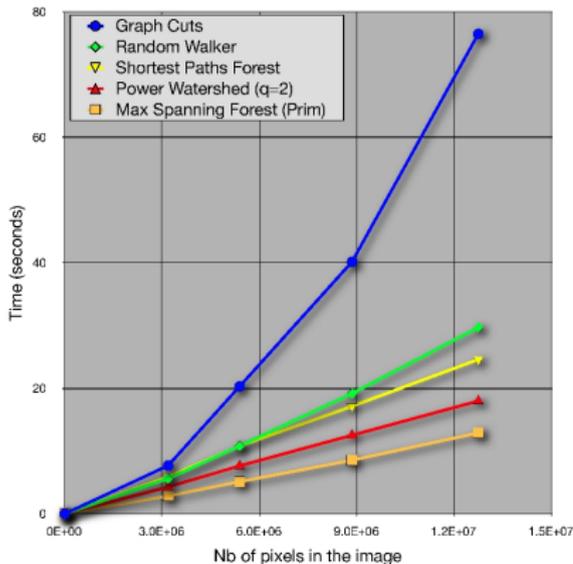
PW $q = 2$ 

MaxSF

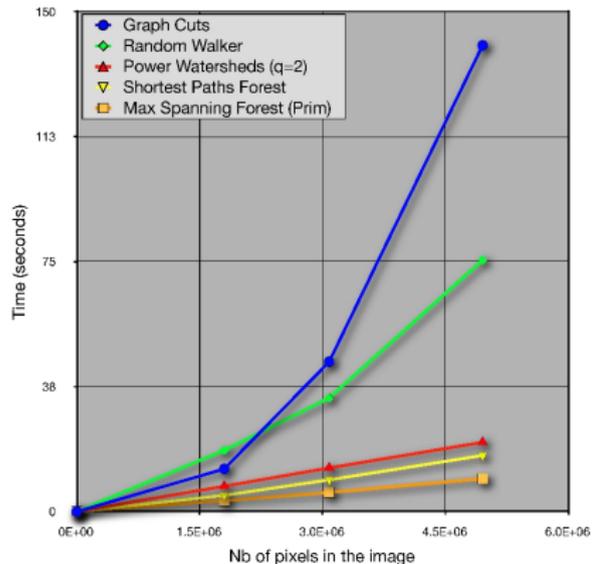
PW $q = 2$

Temps de calcul

Computation times 2D



Computation times 3D



Diffusion anisotropique avec norme ℓ_0

$$x^* = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \underbrace{\sum_{e_{ij} \in E} \sigma(x_i - x_j)}_{\text{Régularisation}} + \lambda \underbrace{\sum_{v_i \in V} \sigma(x_i - f_i)}_{\text{Fidélité}}$$

$$\sigma(x) = 1 - e^{-\alpha x^2}$$

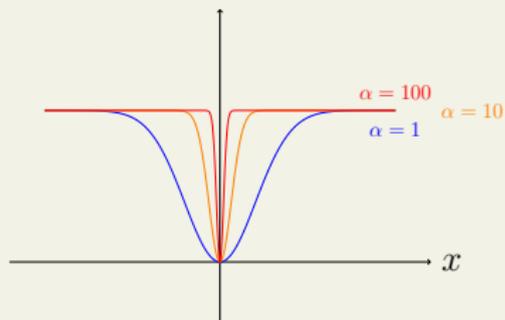
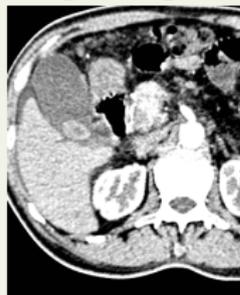
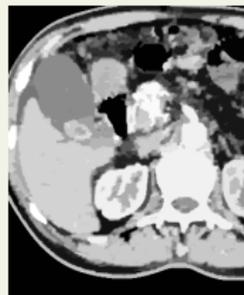


Image originale

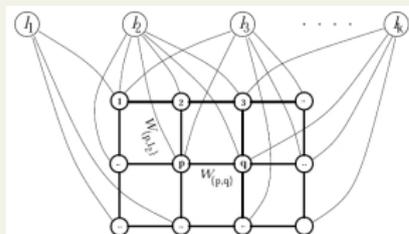


Résultat du PW

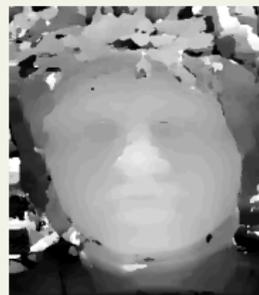


Stereovision avec le PW

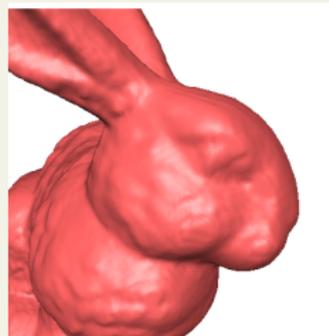
- Calcul de la carte de disparité



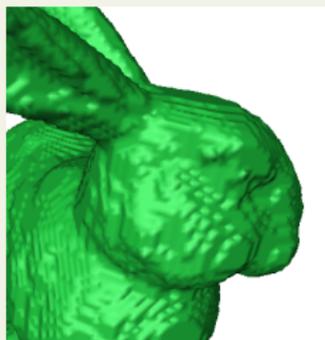
- Les labels correspondent aux disparités, avec des poids correspondant aux coefficients de similarité entre blocs



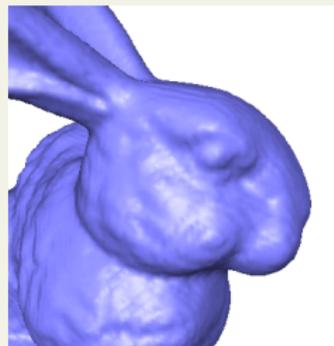
Reconstruction de surface



Total variation



Graph cuts



Power watershed

- Reconstruction rapide et efficace à partir de points bruités.
- Peu sensible au placement des marqueurs
- Ne nécessite pas d'estimation de normale
- Ne nécessite pas de filtrage supplémentaire

Conclusion

- Nous avons proposé une formulation générale, à deux paramètres, qui englobe un grand nombre de méthode de partitionnement / segmentation discrètes ;
- Nous avons proposé une nouvelle méthode, la LPE puissance, qui est le résultat d'un processus de gamma-convergence dans le cadre de cette formulation ;
- La LPE puissance donne une interprétation de la LPE en terme d'optimisation.
- Cette méthode d'optimisation a des applications en vision, elle est efficace et globalement optimale pour certains problèmes (multi-labels en particulier).
- Ce travail représente environ 1/3 du travail de thèse de Camille Couprie, qui a été récompensé par 3 prix de thèse.



Allène, C., Audibert, J.-Y., Couprie, M., Cousty, J., and Keriven, R. (2007).

Some links between min-cuts, optimal spanning forests and watersheds.

In *Procs. 8th International Symposium on Mathematical Morphology*, Rio de Janeiro, Brazil.



Beucher, S. and Lantuéjoul, C. (1979).

Use of watersheds in contour detection.

In *Int. Workshop on Image Processing*, Rennes, France.
CCETT/IRISA.



Boykov, Y. and Jolly, M.-P. (2002).

Interactive graph cuts for optimal boundary & region segmentation of objects in n-d images.

In *Computer Vision, 2001. ICCV 2001. Proceedings. Eighth IEEE International Conference on*, pages 105–112,
Vancouver, BC , Canada.

-  Boykov, Y., Veksler, O., and Zabih, R. (1998).
Markov random fields with efficient approximations.
In *CVPR*, pages 648–655.
-  Couprie, C., Grady, L., Najman, L., and Talbot, H. (2009).
Power watersheds : A new image segmentation framework
extending graph cuts, random walker and optimal spanning
forest.
In *Proceedings of ICCV 2009*, pages 731–738, Kyoto, Japan.
IEEE.
-  Couprie, C., Grady, L., Najman, L., and Talbot, H. (2011).
Power watersheds : A unifying graph-based optimization
framework.
*IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine
Intelligence*, 33(7) :1384 – 1399.
-  Cousty, J., Bertrand, G., Najman, L., and Couprie, M.
(2008).

Watershed cuts : minimum spanning forests and the drop of water principle.

IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, pages 1362–1374.



Cousty, J., Bertrand, G., Najman, L., and Couprie, M. (2010).

Watershed cuts : thinnings, shortest-path forests and topological watersheds.

IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 32(5) :925–939.



Geman, S. and Geman, D. (1984).

Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images.

pami, 6 :721–741.



Grady, L. (2006).

Random walks for image segmentation.

IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 28(11) :1768–1783.



Rudin, L. I., Osher, S., and Fatemi, E. (1992).

Nonlinear total variation based noise removal algorithms.

Phys. D, 60(1-4) :259–268.



Sinop, A. K. and Grady, L. (2007).

A seeded image segmentation framework unifying graph cuts and random walker which yields a new algorithm.

In *Computer Vision, 2007. ICCV 2007. IEEE 11th International Conference on*, pages 1–8. IEEE.