

Triangles Gog et Magog, et involution de Schützenberger

Philippe Biane

Visite AERES

11 décembre 2013

Une permutation

$$\sigma = 4 \ 1 \ 5 \ 3 \ 2$$

On écrit les facteurs gauches successifs en les réordonnant

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\ & 1 & & 3 & & 4 & & 5 \\ & & 1 & & 4 & & 5 \\ & & & 1 & & 4 \\ & & & & 4 \end{array}$$

on obtient la *clé* $T(\sigma)_{ij}$.

Ce codage permet de définir l'ordre de Bruhat sur les permutations:

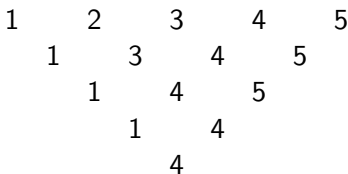
$$\sigma \leq_{\text{Bruhat}} \tau \quad \text{ssi} \quad T(\sigma)_{ij} \leq T(\tau)_{ij}$$

Les triangles obtenus sont des triangles de Gelfand-Tsetlin :
les lignes sont entrelacées

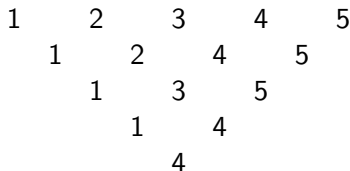
ils sont strictement croissants sur chaque rangée

la rangée du haut est $1, 2, 3, \dots, n$.

Chaque ligne est incluse dans la précédente.



Si on oublie la dernière condition:
 les lignes sont entrelacées
 ils sont strictement croissants sur chaque rangée
 la rangée du haut est $1, 2, 3, \dots, n$.



on obtient les triangles Gog.

Les triangles Gog forment un treillis: $\min(a, b)$ et $\max(a, b)$
 existent toujours et sont obtenus coordonnée par coordonnée.

Les triangles Gog forment le treillis enveloppant de l'ordre de
 Bruhat-Ehresmann. (Lascoux et Schützenberger).



Alain Lascoux

Les triangles Gog codent de nombreux objets combinatoires ou algébriques:

Matrices à signes alternants

Configurations de boucles compactes

Modèle à six sommets

Pavages du diamant aztèque

Bases des représentations de la superalgèbre de Lie "étrange"
etc.

Énumération des triangles Gog

Le nombre de triangles de taille n est

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$$

$$A_n = 1 \quad 2 \quad 7 \quad 42 \quad 429 \quad 7436 \quad 218348$$

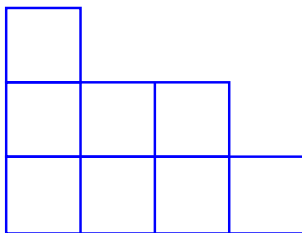
Conjecturé par Mills, Robbins, Rumsey (1986).

Démontré par D. Zeilberger (1995).

Il y a d'autre preuves par G. Kuperberg, I. Fischer ...

Partitions

Ce sont des empilements de carrés dans un coin.



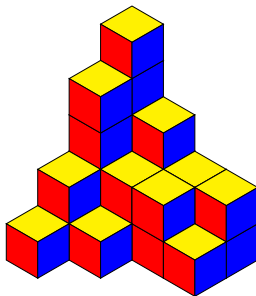
$$8 = 4 + 3 + 1$$

Énumération ;

$$\sum_{\lambda \in P} q^{|\lambda|} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n)}$$

Partitions planes

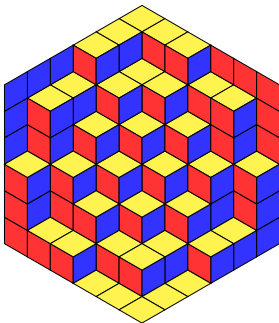
Ce sont des empilements de cubes dans un coin.



Formule de Mac Mahon

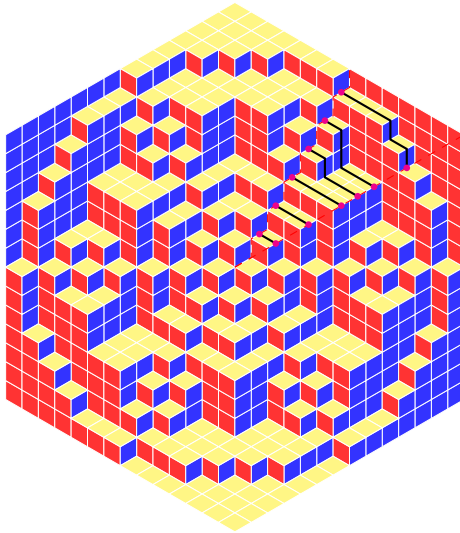
$$\sum_{\pi \in PP} q^{|\pi|} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n)^n}$$

Partitions planes totalement symétriques, auto-complémentaires



Partitions planes, avec toutes les symétries de l'hexagone, et égales à leur complémentaire dans le cube.

Les TSSCPPs sont codées par des chemins non intersectants.



Énumération des TSSCPP

$$B_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$$

$$B_n = 1 \quad 2 \quad 7 \quad 42 \quad 429 \quad 7436 \quad 218348$$

$$B_n = A_n$$

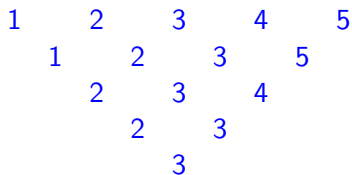
Problème: trouver une preuve bijective.

Triangles Magog

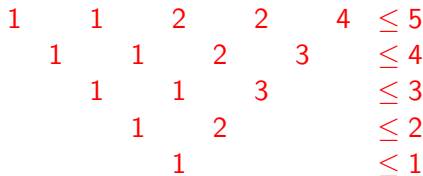
$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & & 1 & & 2 & & 2 & & 4 & \leq 5 \\
 & 1 & & 1 & & 2 & & 3 & & \leq 4 \\
 & \searrow & 1 & & 1 & & 3 & \nearrow & & \leq 3 \\
 & & & 1 & & 2 & & & & \leq 2 \\
 & & & & 1 & & & & & \leq 1
 \end{array}$$

Ils codent les TSSCPPs.

Problème: trouver une bijection entre triangles Gog et Magog.



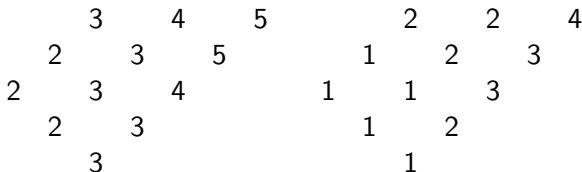
Triangles Gog: strictement croissants sur chaque rangée, la rangée du haut est $1, 2, 3, \dots, n$.



Triangles Magog

Trapèzes Gog et Magog.

Les k diagonales SO-NE (à droite) d'un triangle Gog (ou Magog) forment un *trapèze*.



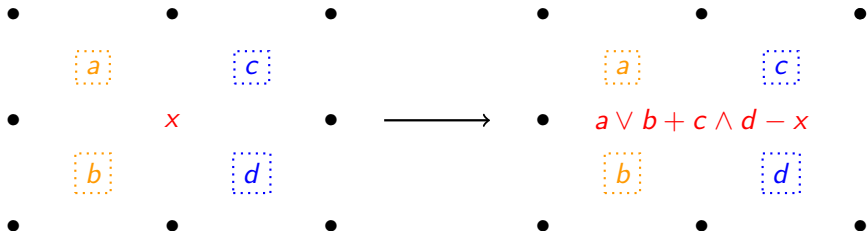
Trapèzes Gog et Magog de taille $(5, 3)$.

D'après Zeilberger (1995), pour chaque (n, k) les trapèzes Gog et Magog sont équiénumérés.

B. et Cheballah (2012-2013): algorithme donnant la bijection entre trapèzes Gog et Magog de tailles $(n, 1)$ et $(n, 2)$.

Utilise l'involution de Schützenberger.

Involution de Schützenberger



On applique cette transformation dans la rangée i

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & & 1 & & 2 & & 2 & & 4 \\
 & & 1 & & 1 & & 2 & & 3 & \\
 & & & 1 & & 1 & & 3 & & \\
 \text{rangée } 2 & \rightarrow & & 1 & & 2 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & &
 \end{array}$$

c'est s_i

L'involution de Schützenberger est

$$S = s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} s_1 s_2 \dots s_{n-2} \dots s_1 s_2 s_1$$