

Matrices aléatoires non hermitiennes et applications

Walid Hachem
Equipe Signal et Communication

Visite du comité HCERES

13 février 2019



École des Ponts
ParisTech

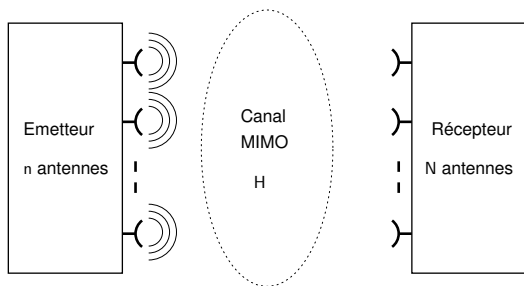
ESIEE
PARIS

UP
EM
UNIVERSITÉ
PARIS-EST
MARNE-LA-VALLÉE

Grandes matrices aléatoires hermitiennes

Le cas non hermitien : contexte et applications

L'exemple des canaux de communication MIMO



- ▷ $H \in \mathbb{C}^{N \times n}$: canal MIMO (**matrice aléatoire**)
- ▷ L'information mutuelle de Shannon \mathcal{I} croît comme le rang de H :

$$\mathcal{I} = \mathbb{E} \log \det(HH^* + I) = \mathbb{E} \sum_{i=1}^N \log(\lambda_i + 1)$$

⇒ **Connaître la distribution des valeurs propres λ_i de HH^***

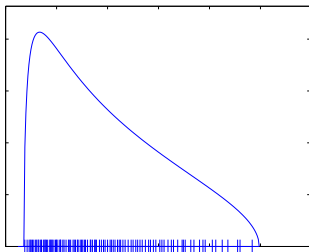
Mesure spectrale limite

Un modèle emblématique :

$$\Sigma = HH^*, \quad H \in \mathbb{C}^{N \times n}, \text{ éléments iid centrés de variance } 1/N$$

Mesure spectrale : $\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$, λ_i sont les **valeurs propres** de Σ

Quand $N, n \rightarrow \infty$ au même rythme, converge vers une loi de Marchenko-Pastur μ_{MP} [M.-P.'67]



$$\mathcal{I} \simeq \mathcal{I}_{MP} = N \int \log(\lambda + 1) \mu_{MP}(d\lambda)$$

Applications

Modèles **plus complexes** que le modèle iid

Télécoms :

- ▷ H est un **canal MIMO** : capacités de Shannon, récepteurs numériques, ...

Signal, statistiques :

- ▷ Σ est la matrice de covariance empirique d'une **série temporelle** H :
 - ▷ Filtrage d'antennes et localisation de sources
 - ▷ Inférence statistique et tests de détection
 - ▷ Analyse de séries temporelles et identification de systèmes d'état (ex : projet ANR HIDITSA)
 - ▷ ...

Grandes matrices aléatoires hermitiennes

Le cas non hermitien : contexte et applications

Contextes applicatifs

$\Sigma \in \mathbb{C}^{N \times N}$ matrice aléatoire non hermitienne de grandes dimensions

- ▷ **Automatique, systèmes dynamiques** : matrice d'état d'un système linéaire $x_{n+1} = \Sigma x_n + u_n$ non connue exactement
- ▷ **Réseaux de neurones** : matrice de connectivité
- ▷ **Réseaux écologiques** : le vecteur qui représente les proportions des espèces d'un système écologique suit une ODE. La linéarisation autour d'un point d'équilibre met en jeu une matrice aléatoire non hermitienne Σ (incertitudes sur les couplages entre les espèces).

Stabilité du système dynamique

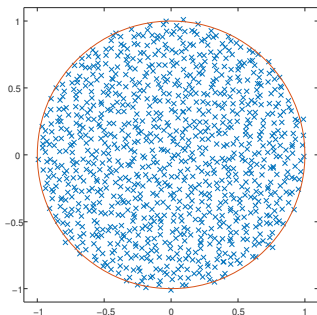
\Leftrightarrow

**localisation des valeurs propres de Σ
représentées par sa mesure spectrale μ_N .**

La loi circulaire

Modèle emblématique : $\Sigma \in \mathbb{C}^{N \times N}$, éléments iid centrés, variance $1/N$

- ▷ Valeurs propres **complexes**
- ▷ Mesure spectrale μ_N **converge vers la loi uniforme sur le disque unité**
[Ginibre'65], [Mehta'67], ..., [Tao-Vu'10]



Difficulté

- ▷ Contrairement au cas hermitien, les valeurs propres d'une matrice non hermitienne peuvent être **instables** : le ε -pseudo spectre

$$\{z \in \mathbb{C} : \|(\Sigma - z)^{-1}\| \geq \varepsilon^{-1}\}$$

d'un opérateur non normal peut beaucoup s'écarter du spectre.

- ▷ Pour étudier la mesure spectrale μ_N pour N grand, il faut montrer que dans le cas aléatoire iid, le pseudo spectre reste circonscrit : **Contrôler la plus petite valeur singulière de $\Sigma - z$** pour presque tout z .

Quelques jalons : [Erdős'45], [Litvak *et.al.*'05], [Rudelson-Vershynin'08], [Tao-Vu'09]

Résultats et perspectives

- ▷ **Cas plus complexes que le cas iid** :
 - ▷ **Résultat** ([Cook-Hachem-Najim-Renfrew'17], projet ANR DIONISOS) : variances des éléments de Σ différentes, « champ de variances » aussi creux que possible
 - ▷ **Perspective** : comportement **global et local** de μ_N dans des cas plus **complexes**.
Exemple : Σ non centrée à champ de variances
- ▷ **Inférence statistique** : La grande sensibilité des valeurs propres aux perturbations peut être un avantage pour **détecter** ces perturbations
 - ▷ **Résultat** ([Bose-Hachem'18]) : test de blancheur appliqué basé sur la matrice d'autocovariance à un lag d'une série multivariée
 - ▷ **Perspective** : analyse de performance, modèle plus sophistiqué, ...

Perspectives

- ▷ **Réseaux écologiques** : **stabilité** du système vs **positivité** de la solution (proportions d'espèces).
- ▷ **Fluctuations** de fonctionnelles des valeurs propres, application aux performances de tests statistiques.
Difficulté : absence d'un calcul fonctionnel dans le cas non hermitien.